TEMAT:

CENA CAŁKOWITA, CENA JEDNOSTKOWA I CENA KRAŃCOWA NIERUCHOMOŚCI (część 1)

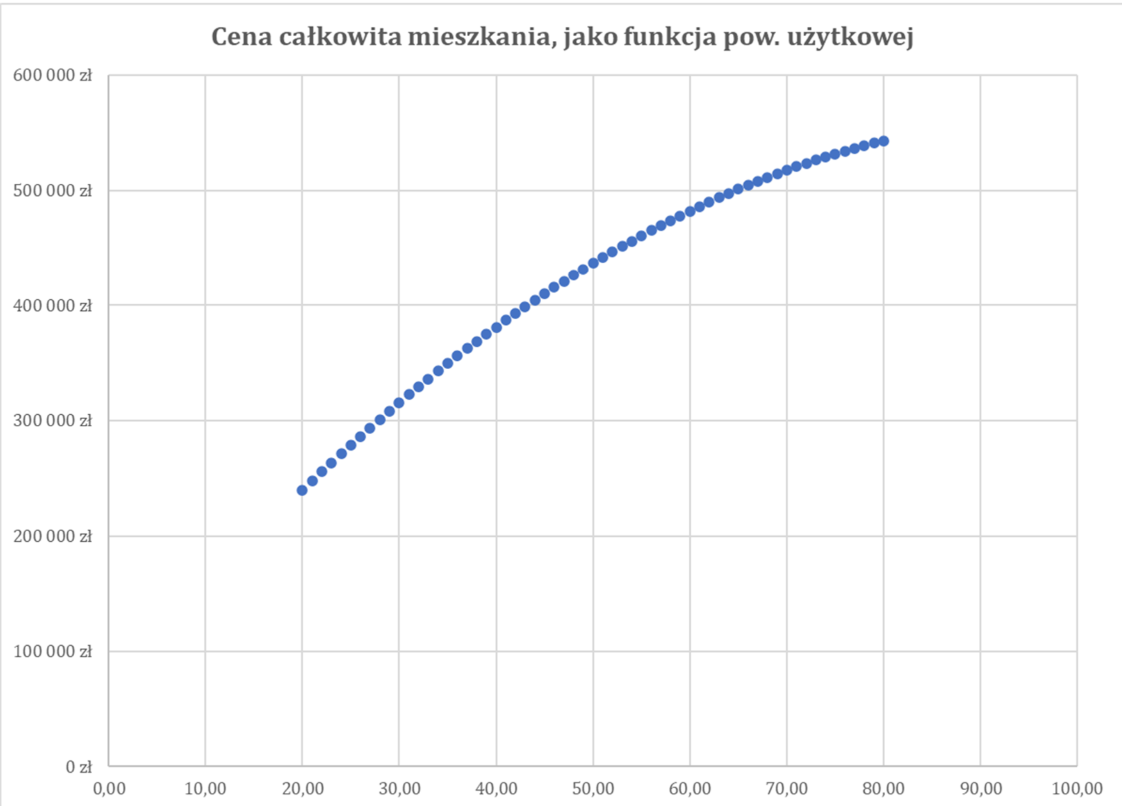
Rozpatrzmy następujący, prosty przykład:

Przyjmijmy, że cena mieszkania o powierzchni 20 m^2 wynosi 240.000 zł. Przyjmijmy również, że następny 1 m^2 pow. użytkowej mieszkania jest wart 8.000 zł (czyli wartość mieszkania o powierzchni 21 m^2 wynosi 248.000 zł), a każdy kolejny 1 m^2 jest wart od poprzedniego mniej o 100 zł. Oznacza to, że kolejne przyrosty ceny, wraz z jednostkowym wzrostem pow. użytkowej, zmieniają się (maleją) liniowo w tempie równym -100 zł. Przykładowo:

- mieszkanie o pow. 20 m^2: 240.000 zł
- mieszkanie o pow. 21 m^2: 240.000 + 8.000 = 248.000 zł
- mieszkanie o pow. 22 m^2: 248.000 + 7.900 = 255.900 zł
- mieszkanie o pow. 23 m^2: 255.900 + 7.800 = 263.700 zł

i tak dalej…

Innymi słowy, wartość każdego kolejnego, dodatkowego 1 m^2 powierzchni użytkowej jest mniejsza, a zależność ta jest liniowa. Dla przyjętych danych wykres ceny całkowitej, jako funkcja pow. użytkowej mieszkania, jest następujący:



materiał szkoleniowy opracowany przez:

Piotr Cegielski, PhD, MSc, MBA, MAI, MRICS

mail: cegielski@iccs.pl

Przyjętą zależność, po odpowiednich przekształceniach matematycznych, których nie będziemy tutaj prezentować, można przedstawić następującym wzorem (sprawdzenie poprawności wzoru zostawiamy Czytelnikowi):

$$Y = 59.000 + (10.050 - 50 \cdot x) \cdot x = 59.000 + 10.050 \cdot x - 50 \cdot x^2$$

gdzie Y to cena całkowita, a x to powierzchnia użytkowa mieszkania.

Ogólna postać wzoru jest następująca:

$$Y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

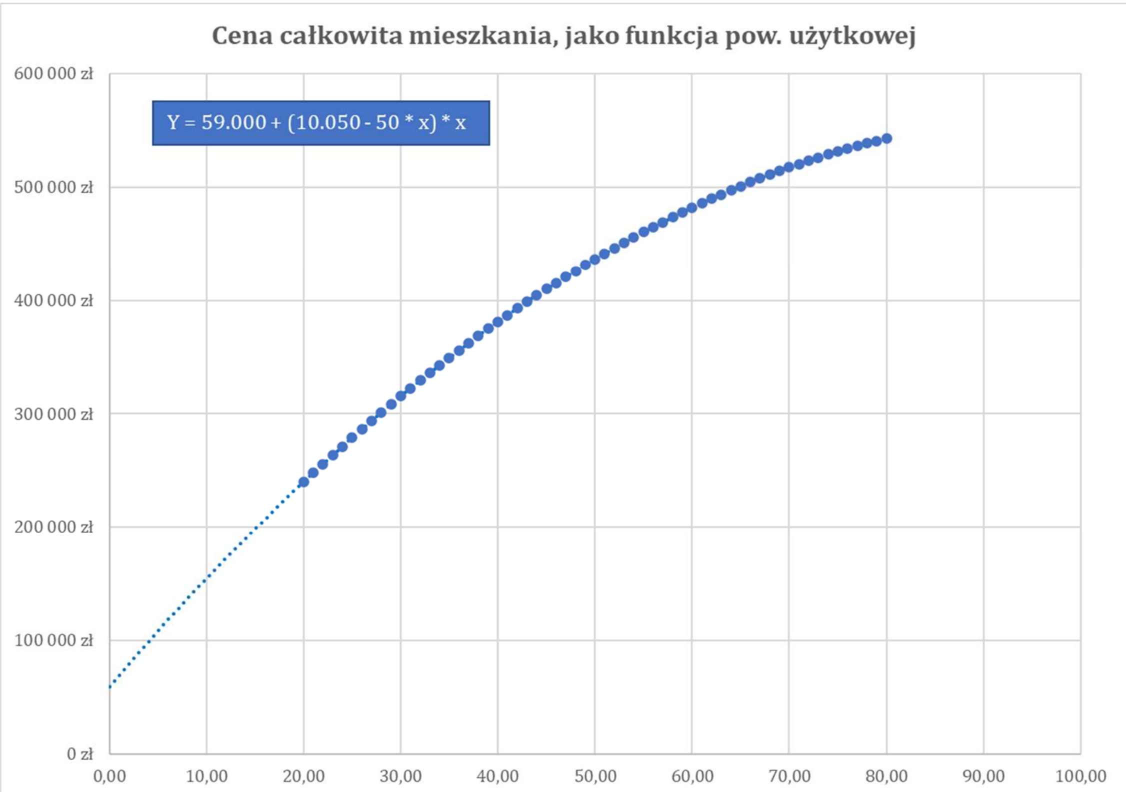
gdzie:

a_0 - wyraz wolny, tutaj niejako cena (wartość) całkowita mieszkania o „zerowej” pow. użytkowej (interpretacja wyrazu wolnego może być skomplikowana i zostanie odrębnie przedstawiona)

a_1 - wartość „zerowego” m^2 powierzchni użytkowej mieszkania, z pominięciem wyrazu wolnego (zarazem średnia cena jednostkowa, gdyby ceny jednostkowe nie zależały od pow. użytkowej)

a_2 - połowa tempa spadku ceny (wartości) każdego następnego 1 m^2 powierzchni użytkowej

Uwaga: po dokonaniu przekształcenia matematycznego parametr a_2 w powyższym wzorze to już nie jest wcześniej przyjęte tempo zmiany wartości każdego kolejnego m^2 (w przykładzie przyjęte na poziomie -100 zł), tylko „połowa” tego tempa; zostanie to wytłumaczone w dalszej części opracowania.

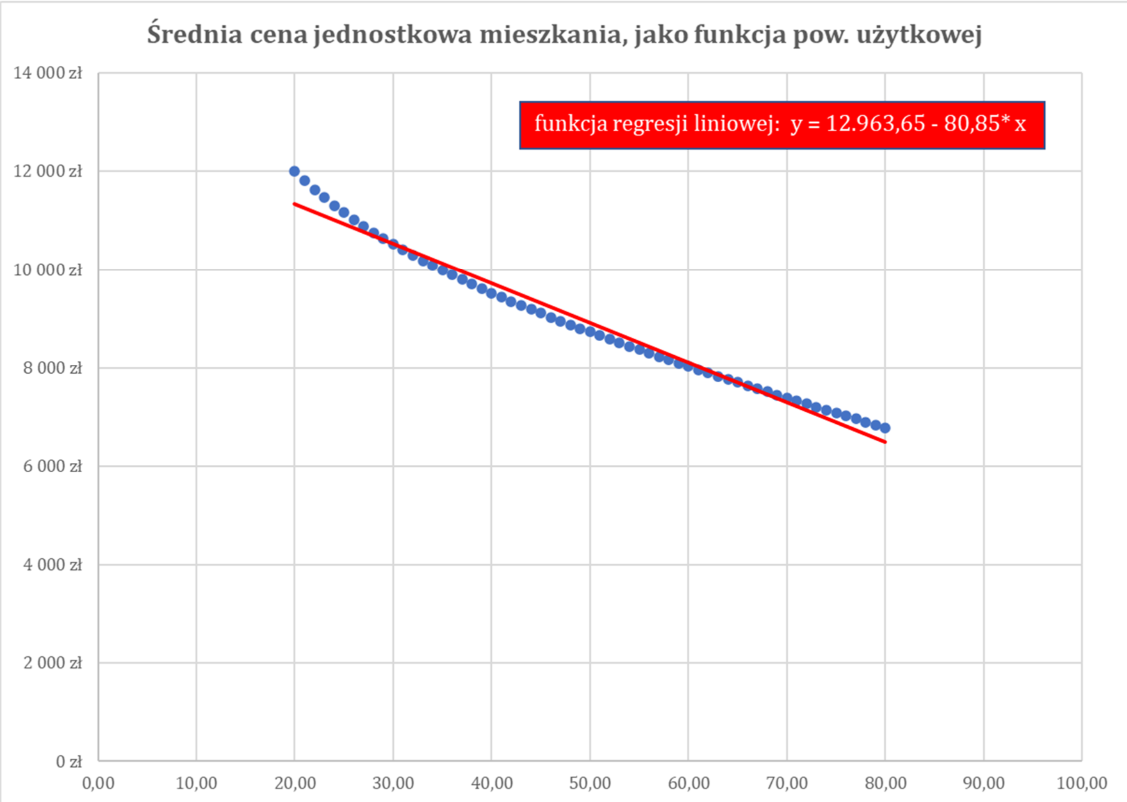


Przykładowo, dla mieszkania o powierzchni użytkowej równej 20 m^2, uzyskuje się wynik:

$$Y = 59.000 + 10.050 \cdot 20{,}00 - 50 \cdot (20{,}00)^2 = 240.000$$

Przyjmijmy, że dla powyższych danych (ceny całkowite mieszkań o powierzchni od 20 do 80 m^2) obliczymy ceny jednostkowe, a następnie wyznaczymy zależność liniową pomiędzy powierzchnią użytkową a ceną jednostkową przy wykorzystaniu funkcji regresji (ściśle: założymy, że tę zależność możemy zamodelować funkcją liniową, a następnie wyznaczymy parametry równania prostej, stosując metodę najmniejszym kwadratów – MNK). Dla przyjętych przez nas danych uzyskuje się następujący liniowy model zależności cen jednostkowej od powierzchni użytkowej postaci:

$$y = 12.963{,}65 - 80{,}85 \cdot x$$



Zauważmy, że w rzeczywistości ceny jednostkowe nie są liniową funkcją powierzchni użytkowej, a uzyskana funkcja regresji liniowej jest jedynie pewnym przybliżeniem tej nieliniowej zależności.

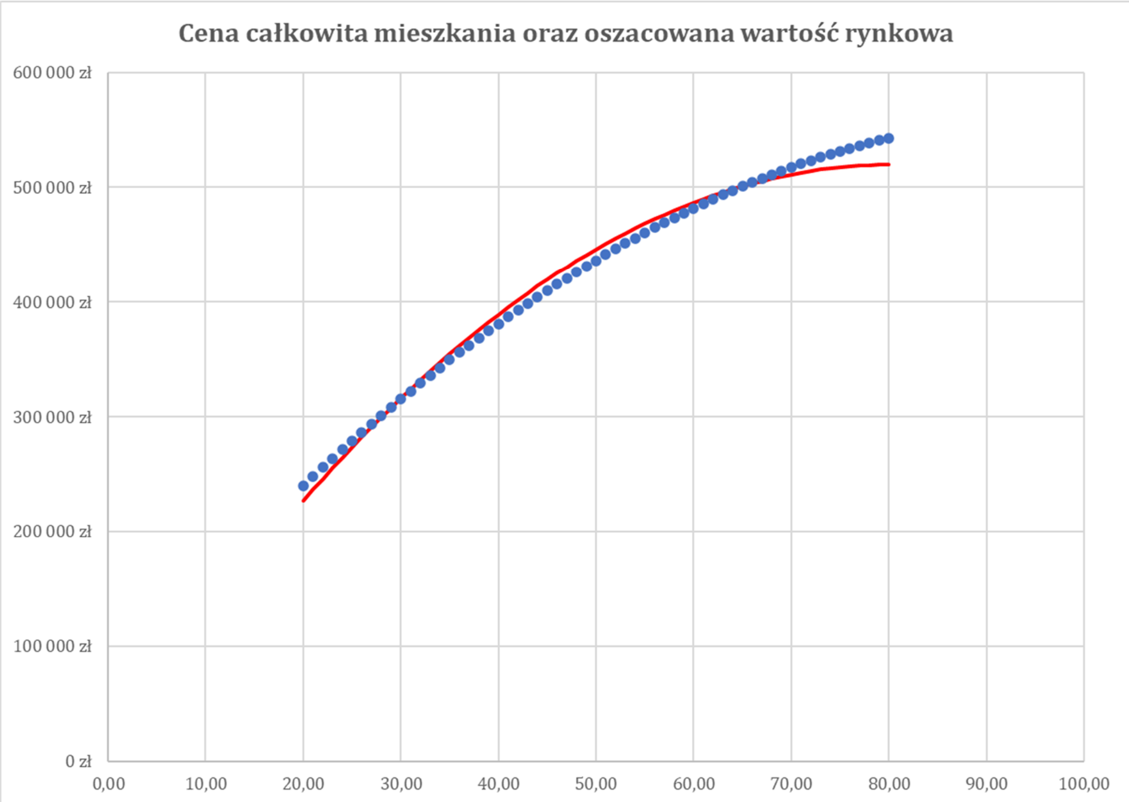
Zgodnie z wyznaczoną funkcją regresji jednostkowa cena (wartość) mieszkania o powierzchni równej 20 m^2 wynosi:

$$y = 12.963{,}65 - 80{,}85 \cdot 20{,}00 = 11.347$$

a cena (wartość) całkowita jest odpowiednio równa:

$$Y = 11.347 \cdot 20{,}00 = 226.940$$

Dokonując oszacowania wszystkich mieszkań o powierzchniach użytkowych z przedziału od 20 do 80 m² uzyskuje się następujące wyniki:



Jak widać, liniowy model ceny jednostkowej dokonuje „błędnych" oszacowań – zaniża wartość mieszkań o skrajnie małych i skrajnie dużych powierzchniach, nieznacznie przeszacowując ceny mieszkań o typowej powierzchni. Nie są to bardzo duże różnice, choć na tym etapie analizy, w przypadku „wzorcowych danych „modelowych", tego typu efekt jest raczej nieoczekiwany.

Przykładowo, cena rynkowa mieszkania o powierzchni 80 m² wynosi:

$$Y = 59.000 + 10.050 \cdot 80{,}00 - 50 \cdot (80{,}00)^2 = 543.000$$

podczas gdy model regresji liniowej ceny 1 m² daje następujący rezultat:

$$Y = (12.963{,}65 - 80{,}85 \cdot 80{,}00) \cdot 80{,}00 = 519.650$$

Co się dzieje???

Dlaczego, skoro każdy następny 1 m² powierzchni użytkowej jest mniej wart od poprzedniego o stałą kwotę równą 100,00 zł, uzyskujemy „błędne" wyniki? Dlaczego, wynikająca z analizy regresji, zmiana spadku ceny jednostkowej nie jest równa -100,00 zł (a może -50,00 zł), tak jak byśmy się tego spodziewali, tylko -80,85 zł?

Wprowadźmy następujące pojęcia:

- cena jednostkowa - średnia cena 1 m^2 powierzchni użytkowej
- cena krańcowa - cena 1 m^2 „dodatkowej” powierzchni użytkowej

Na rynku obserwuje się spadek cen jednostkowych wraz ze wzrostem powierzchni użytkowej (*ceteris paribus*). Jest to jednak niejako uboczny efekt spadku cen krańcowych. Jeżeli użyteczność każdego kolejnego 1 m^2 powierzchni jest coraz mniejsza, to ceny krańcowe są coraz mniejsze, zatem przyrosty ceny całkowitej również coraz mniejsze, a co za tym idzie spadają też (średnie) ceny jednostkowe. Spadek cen jednostkowych, wraz ze wzrostem powierzchni, jest zatem jedynie efektem ubocznym spadku cen krańcowych.

Formalnie (z matematycznego punktu widzenia) cena krańcowa to pochodna funkcji ceny całkowitej, czyli:

$$Y' = \frac{\delta Y}{\delta x} = (a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2)' = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x$$

Z kolei wzór na cenę jednostkową (iloraz ceny całkowitej i powierzchni użytkowej mieszkania) można przedstawić w sposób następujący:

$$y = \frac{Y}{x} = \frac{a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2}{x} = \frac{a_0}{x} + a_1 + a_2 \cdot x$$

Zauważmy, że na samym początku przyjęliśmy tempo zmiany cen krańcowych na poziomie -100,00 zł, podczas gdy parametr a_2 wyznaczonego przez nas równania ceny całkowitej wynosi -50,00 zł. Jest tak dlatego, iż tempo zmiany poziomu ceny krańcowej to formalnie (z matematycznego punktu widzenia) kolejna pochodna, czyli:

$Y'' = (a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x)' = 2 \cdot a_2$ (w przykładzie: $2 \cdot a_2 = 2 \cdot (-50) = -100$)

Z kolei „błędnie” przyjęty przez nas wzór na cenę jednostkową nieruchomości mieszkaniowej ma postać:

$y = b_0 + b_1 \cdot x$ (w przykładzie b_0 = 12.963, b_1 = -80,85, a zatem $2 \cdot b_1$ = -161,70)

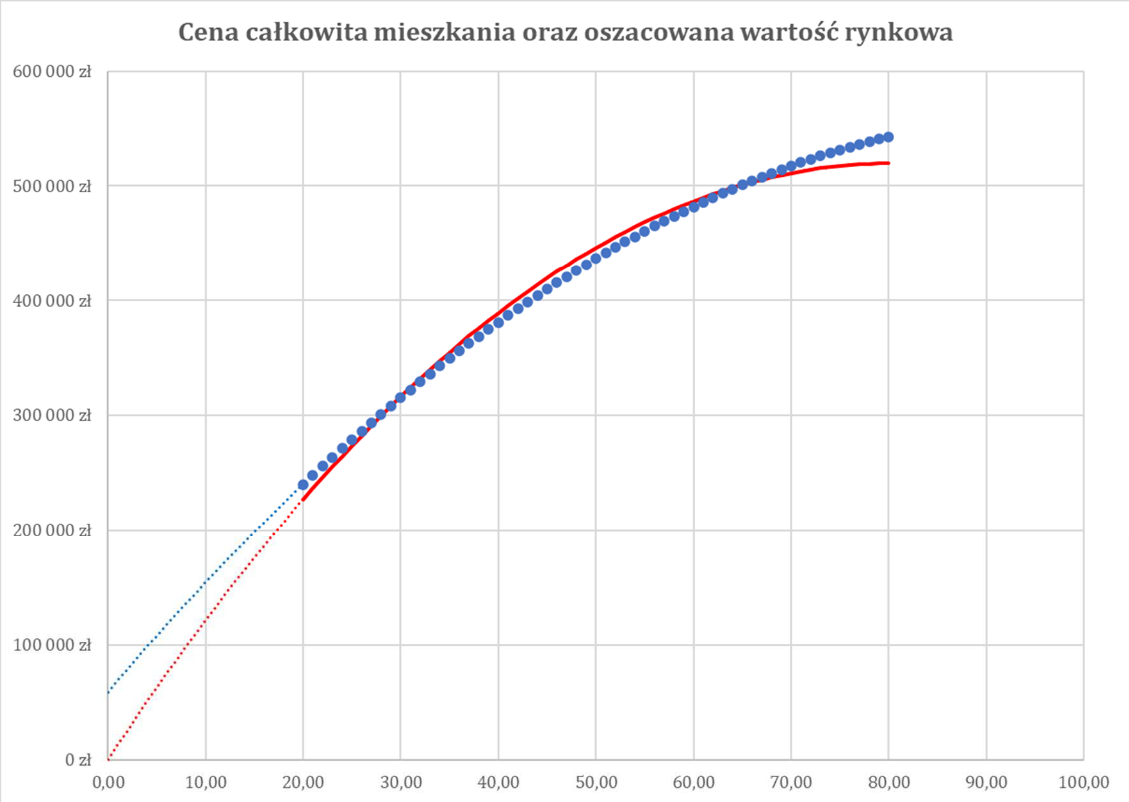
co po przemnożeniu ceny jednostkowej przez pow. użytkową daje zależność na cenę całkowitą mieszkania:

$$Y = y \cdot x = (b_0 + b_1 \cdot x) \cdot x = b_0 \cdot x + b_1 \cdot x^2$$

Innymi słowy, stosując liniowy model regresji ceny jednostkowej do ustalenia zależności pomiędzy ceną jednostkową a powierzchnią użytkową mieszkania zakładamy (świadomie lub nie), że model ceny całkowitej jest wielomianem drugiego stopnia, ale bez wyrazu wolnego.

Ale co to wszystko znaczy i jakie to ma dla nas znaczenie w procesie analizy danych rynkowych???

Popatrzmy jeszcze raz na wykres cen całkowitych, przy czym teraz ceny zostaną „pociągnięte" począwszy od zera.



Jak widzimy, dla przyjętych przez nas danych liczbowych, model bez wyrazu wolnego (zarazem liniowy model ceny jednostkowej) przypisuje mieszkaniu o „zerowej" powierzchni użytkowej zerową wartość. Pomijając na tym etapie zagadnienie, czy jest to prawidłowe (pozornie tak się może wydawać) widzimy, iż przejście funkcji przez punkt [0; 0] powoduje, że jej przebieg jest bardziej „stromy", a wartość maksymalna funkcji (ekstremum) jest osiągnięta wcześniej (funkcja osiąga wartość maksymalna dla powierzchni użytkowej równej 75,50 m^2, podczas gdy dla modelu z wyrazem wolnym funkcja ceny całkowitej osiąga wartość maksymalną dla powierzchni użytkowej równej 100,50 m^2).

Jakie zatem są zasady oraz jakie są możliwości, jeśli chodzi o modelowanie cen nieruchomości?

W rzeczywistości możliwości jest kilka i zostaną one przedstawione w kolejnych opracowaniach. Na tym etapie warto sobie uświadomić, że przeprowadzając analizę ilościową danych, świadomie lub nie do końca świadomie, zakładamy pewną konkretną postać funkcyjną równania ceny jednostkowej oraz ceny całkowitej. Ta świadomość pozwoli nam kontrolować nasze założenia, a w szczególności pozwoli nam uniknąć błędu modelowania badanej zależności w inny sposób, niż nam się wydawało, że modelujemy.

Opracował:

Piotr Cegielski, PhD. MSc, MBA, MAI, MRICS

(Wrocław, październik 2020)